Модель Бертрана

Критика Бертраном модели Курно.

Олигополисты назначают цены, а не объемы.

Последовательность принятия решения в модели:

1) Фирмы назначают цены p_j (одновременно)

2) Покупатели решают, у какой фирмы и сколько покупать.

Второй этап обычно не рассматривают, т.е. анализируется свернутая игра. Предположение состоит в том, что покупатели покупают по самой низкой цене.

В классической модели Бертрана издержки на единицу продукции считаются постоянными и одинаковыми у всех фирм (c). Фирмы могут производить благо в произвольном количестве при одних и тех же предельных издержках.

При анализе ценовой конкуренции (не только в модели Бертрана) удобно рассматривать функцию спроса $y_j = D_j(p_j, p_{-j})$ — спрос на продукцию фирмы зависит также от цен, назначенных другими. Эта функция определяет свернутую игру.

Выигрыш в свернутой игре — это прибыль в зависимости от назначенных цен:

$$\Pi_j(p_j, p_{-j}) = (p_j - c) D_j(p_j, p_{-j}).$$

Т.о. достаточно задать функцию $D_j(\cdot)$, и мы получим описание (свернутой) игры.

Для упрощения будем считать, что цены выбираются из $[c, +\infty)$ (т.е. $p_j > c$).

Пусть p_{min} — минимальная цена, т.е.

$$p_{min} = \min_j p_j.$$

Если $p_j > p_{min}$, то $y_j = D_j = 0$. Если $p_j = p_{min}$, то $y_j = D(p_{min})/k = 0$, где $D(\cdot)$ — обычная функция спроса, k — количество фирм, назначивших минимальную цену p_{min}.

Равновесием Бертрана называют равновесие Нэша в описанной игре (модели Бертрана). Его характеристика:

По крайней мере две фирмы назначат цены на уровне предельных издержек.

Теорема. Набор цен всех фирм p_j, $j = 1, \ldots, n$ ($n>2$) будет равновесием тогда и только тогда, когда для них выполнена указанная характеристика. (Предположение: $D(p)>0$ в окрестности c.)

Доказательство:

Очевидно, что описанный набор цен составляет равновесие, поскольку ни одной фирме не имеет смысла менять свою цену в одиночку, она в любом случае будет получать нулевую прибыль при данных ценах остальных.

Докажем, что ситуация, когда $p_j > c'_j$ (другими словами, $p_{min} > c$) — не равновесие. А именно, хотя бы одной фирме будет выгодно понизить цену ниже p_{min}. Действительно, если $D(p_{min}) = 0$, то любой фирме будет выгодно назначить любую цену p_j, такую что $D(p_j) > 0$, поскольку в этом случае все потребители придут к ней и она будет обслуживать весь рынок. Если же $D(p_{min}) > 0$, то есть хотя бы одна фирма, которая не обслуживает весь рынок (либо назначившая цену выше минимальной, либо одна из нескольких фирм с минимальной ценой). Она может установить цену немного ниже p_{min} и увеличит прибыль.

Доказали, что в равновесии хотя бы у одной фирмы $p_j = c$. Докажем, что такая фирма будет не одна. Действительно, путь такая фирма одна. Если она немного повысит цену свыше

c то по предположению теоремы спрос останется положительным, и, соответственно, прибыль станет положительной, а не нулевой.

*

Парадокс Бертрана: в олигопольной отрасли получили что-то вроде совершенной конкуренции. В модели предположение о том, что выбираются цены — это приемлемо, однако выводы странные.

Модификации:

1) Неоднородная продукция (продуктовая дифференциация) — функция спроса $D_j(\cdot)$ тогда вполне может быть непрерывной по ценам. Потребители не все уходят к фирме, назначившей наименьшую цену.

2) Издержки имеют другую форму — имеет место убывающая отдача от масштаба. Эджворт: есть ограничения на объемы из-за ограниченности производственных мощностей.

3) Модель Бертрана статическая. Если рассматривать взаимодействие фирм в динамике, то фирмы могут договориться (модель молчаливого сговора).

Можно представить, например, ситуацию, когда мощности фирм ограничены: $y_j < Q_j$. В этом случае может случиться так, что фирма, назначившая минимальную цену, будет не в состоянии удовлетворить весь спрос. Другим фирмам останется остаточный спрос.

Аналогично, при убывающей отдаче может случиться так, что фирма, назначившая минимальную цену, может не захотеть удовлетворять весь спрос. Такое может быть, если при выпуске таком, что цена равна предельным издержкам ($p_j = c_j'(y_j)$), спрос превышает этот выпуск ($y_j < D(p_j)$).

Чтобы анализировать подобные модификации модели, следует включить в игру еще один этап: фирмы выбирают объемы производства. Игра в этом случае становится динамической. Для упрощения в дальнейшем будем предполагать, что фирм две (дуополия). Изобразим игру в виде схемы:

Фирма, назначившая наименьшую цену, выбирает свой выпуск первой, так как покупатели придут сначала к ней.

В рамках модели нужно задать, какой спрос достанется 2-й фирме, если, к примеру, $p_1 < p_2$. Если $p_1 < p_2$, то 2-й фирме достанется некоторый остаточный спрос, $D_2(p_2, y_1, p_1)$, поэтому $y_2 < D_2(p_2, y_1, p_1)$ — выпуск не выше остаточного спроса. Если бы был выше, то 2-я фирма не сможет все продать, а ей это не выгодно.

Остаточный спрос будет зависеть от того, какие потребители купят благо, а какие нет. Для простоты интерпретации можно считать, что каждый потребитель может потребить только одну, бесконечно малую, единицу блага, и количество потребителей бесконечное.

Необходимо рассмотреть некий механизм распределения дефицитного блага. Будем называть этот механизм **рационированием** (хотя такое название не очень адекватно). Будем считать, что функция остаточного спроса $D_2(p_2, y_1, p_1)$ задана при всех допустимых ценах, а не только при $p_2 > p_1$.

Два наиболее очевидных типа рационирования:

⊗ Пропорциональное (случайное) рационирование.

Потребители имеют одинаковые шансы купить благо. При таком рационировании спрос сжимается пропорционально (на графике — в горизонтальном направлении):

$$D_2(p_2, y_1, p_1) = (D(p_1) - y_1) D(p_2) / D(p_1) \text{ при } p_2 < p_1.$$

Хотя случайное рационирование может показаться очень естественным, это не единственный возможный механизм.

⊗ Параллельное (эффективное) рационирование.

Товар достается только тем потребителям, которые его больше всего ценят.

$$D_2(p_2, y_1, p_1) = D(p_1) - y_1 \text{ при } p_2 < p_1.$$

Реально эта схема может оказаться более обоснованной, если есть арбитраж, причем на вторичном рынке нет «трения». Случайное рационирование по факту невозможно при арбитраже: потребители с низкой оценкой перепродадут благо потребителям с высокой оценкой.

Почему рационирование названо «эффективным»? Если (например, при случайном рационировании) у 1-й фирмы по цене p_1 купит потребитель с низкой оценкой (v), так что более высокая цена другой фирмы, p_2, окажется выше его оценки, то ситуация будет неэффективной — суммарный излишек можно увеличить за счет передачи блага потребителю с более высокой оценкой ($v' > v$). Тогда этот второй потребитель может не покупать по цене p_2, а потребитель с низкой оценкой не получит благо — это более эффективно:

$$v - p_1 + v' - p_2 < v' - p_1,$$

как только $v < p_2$. Такие два потребителя всегда найдутся, если имеет место не эффективное рационирование, а какое-либо другое.

Задав способ рационирования, мы можем анализировать модель.

Игру можно свернуть, найдя остаточный спрос и рассмотрев, какие выпуски при данной предыстории выберут фирмы (т.е. найдя функции отклика). Подставив это в функции прибыли, получим редуцированную игру, в которой фирмы одновременно выбирают цены.

Сравним модель с убывающей отдачей с классической моделью Бертрана: будет ли равновесие соответствовать совершенной конкуренции?

Предположим, что в равновесии имеем

$$(p_1, p_2, y_1, y_2) = (\bar{p}, \bar{p}, \bar{y}_1, \bar{y}_2),$$

причем

$$c_1'(\bar{y}_1) = \bar{p},\ c_2'(\bar{y}_2) = \bar{p},\ D(\bar{p}) = \bar{y}_1 + \bar{y}_2.$$

Это аналог совершенной конкуренции. Так будет, если фирмы будут вести себя как ценополучатели.

Докажем, что такого быть не может в модифицированной модели Бертрана.

В частности, второму выгодно выбрать $p_2 > \bar{p}$, при том что $p_1 = \bar{p}$. Полностью сворачивать игру не будем, только в этом частном случае.

При $p_2 = \bar{p}$ фирмы будут выбирать выпуски одновременно и выберут $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ соответственно. Если же $p_2 > \bar{p}$, то первым выбирает выпуск первый, и второму остается остаточный спрос $D_2(p_2, \bar{y}_1, \bar{p})$. Второму тогда выгодно выбрать выпуск равным этому остаточному спросу (если меньше, то, поскольку цена p_2 будет выше предельных издержек, производная прибыли будет положительной).

Заметим, что при $p_2 \to \bar{p} + 0$ (сверху) для произвольной «разумной» схемы рационирования имеем $D_2(p_2, \bar{y}_1, \bar{p}) \to D(\bar{p}) - \bar{y}_1 = \bar{y}_2$. Таким образом, выбор выпуска 2-й фирмой как функция собственной цены в данном случае — непрерывная функция при всех $p_2 > \bar{p}$. Обозначим ее $y_2(p_2)$. Если рационирование дает дифференцируемый остаточный спрос, то $y_2(p_2)$ также дифференцируема. На основе нее можно рассчитать прибыль 2-й фирмы:

$$\Pi_2(p_2) = y_2(p_2) p_2 - c_2(y_2(p_2)).$$

Дифференцируем:

$$\Pi_2'(p_2) = y_2(p_2) + [p_2 - c_2'(y_2(p_2))]\, y_2'(p_2).$$

Так как $c_2'(\overline{y}_2) = \overline{p}$, то $\Pi_2'(\overline{p}) = y_2(\overline{p}) = \overline{y}_2$. При $\overline{y}_2 > 0$ имеем $\Pi_2'(\overline{p}) > 0$.

Модификация модели Бертрана: модель с выбором мощностей

По аналогичным причинам, если есть ограничения по производственным мощностям, то результат может быть совсем не тот, что в классической модели Бертрана. Можно рассмотреть многоэтапную модель, в которой сначала выбирают мощности, затем цены, а затем — выпуски. При эффективном рационировании в этой модели может быть тот же исход, что и в модели Курно. В дальнейшем будем рассматривать только эффективное рационирование.

Объемы производства ограничены:

$$y_j < Q_j,$$

а издержки включают издержки на создание производственных мощностей (предполагаем постоянную отдачу):

$$c \cdot y_j + \gamma \cdot Q_j.$$

Анализ модели проводится следующим образом:

<skip>

Дуополия Бертрана.

$p_1, p_2 \to y_1, y_2$.

При данных ценах выбор объема производства тривиален. Это либо величина производственных мощностей, либо величина спроса на продукцию фирмы. Таким образом, как и в обычной модели Бертрана можно рассматривать игру, в которой фирмы одновременно выбирают цены.

В отличие от обычной модели Бертрана, мы не будем предполагать, что при одинаковых ценах спрос делится поровну между фирмами. Мы будем предполагать только, что в этом случае продажи каждой фирмы положительны. Например, если у одной из фирм мощности меньше половины величины спроса, то остальной спрос «достается» конкуренту.

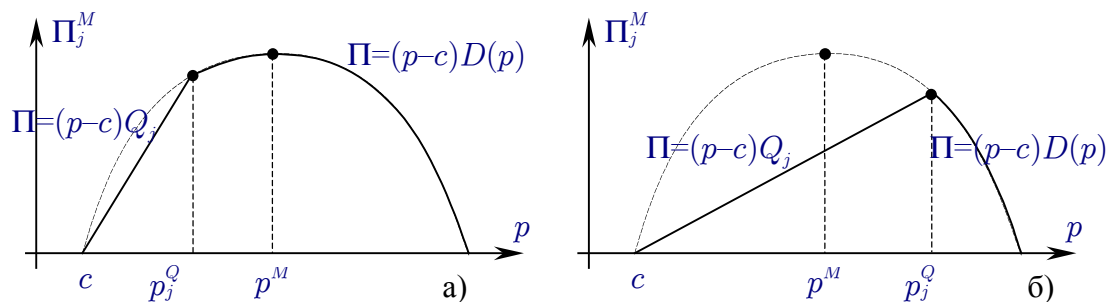
Рассмотрим случай, когда <u>мощности не очень большие</u>: $D(c) > Q_j$, $j = 1,2$ или $c < p_j^Q$, где p_j^Q — цена, при которой спрос равен величине мощностей этой фирмы: $D(p_j^Q) = Q_j$.

Сначала рассмотрим прибыль j-й фирмы как монополиста как функцию цены: $\Pi_j^M(p)$. Рассмотрение прибыли монополиста позволит нам проанализировать случай, когда у одной фирмы цена меньше, чем у другой. Пока цена фирмы меньше цены конкурента, она находится в положении монополиста с постоянными средними издержками c и мощностями Q_j.

При $p \in [c, p_j^Q]$ монополист полностью загрузит мощности: $y_j = Q_j$. Прибыль при этом линейна по ценам: $\Pi = (p - c) Q_j$. При $p \geqslant p_j^Q$ — как у обычного монополиста. Прибыль имеет вид $\Pi = (p - c) D(p)$. Оптимум: p^M.

Возможны два случая: $p_j^Q<p^M$ и $p_j^Q>p^M$ ($p_j^Q=p^M$ — граничный случай — неособенный).

Предполагаем, что функция прибыли обычного монополиста, $(p-c)D(p)$, является ква-

Рисунок 1. а) $p_j^Q<p^M$ — мощности большие (но не очень большие), б) $p_j^Q>p^M$ — малые мощности

зивогнутой. Тогда p^M — единственный максимум этой функции, слева от p^M данная функция возрастает, а справа — убывает. При этом монополист будет выбирать из p_j^Q и p^M. Если $p_j^Q<p^M$, то он выберет $p=p^M$, и будет производить $y_j=D(p^M)$ (мощности недогружены, спрос по цене p^M полностью удовлетворен). Если $p_j^Q>p^M$, то он выберет $p=p_j^Q$, и будет производить $y_j=Q_j$ (мощности полностью загружены, остается неудовлетворенный спрос).

Эти картинки относятся к случаю, когда у фирмы цена меньше, чем у конкурента, и он оказывается в положении монополиста, ограниченного производственными мощностями. Покажем, что такая ситуация — когда у одной из фирм цена меньше, чем у конкурента — невозможен в равновесии в рассматриваемой модели дуополии.

По определению равновесия Нэша, если, например, цена фирмы 1 зафиксирована на равновесном уровне, то прибыль фирмы 2 достигает максимума при равновесной цене. Таким образом, для анализа того, может или не может определенная ситуация сложиться в равновесии, следует рассмотреть поведение прибыли каждой фирмы по ее цене при фиксированной цене конкурента.

Зафиксируем, например, цену p_1 и рассмотрим $\Pi_2(p_2,p_1)$ как функцию p_2. Слева от p_1 фирма 2 оказывается в положении монополиста, и ее прибыль имеет такой же вид, как на Рис. 1. При $p_2=p_1$ фирма 2 перестает быть монополистом и каким-то образом делит спрос с фирмой 1 (пока для нас не важно, каким именно образом). Далее, справа от p_1 прибыль фирмы 2 находится по остаточному спросу и зависит от выпуска, выбранного фирмой 1.

Пусть $p_1\geqslant p_1^Q$. Тогда, сталкиваясь с полным спросом $D(p_1)$, фирма 1 сможет полностью его удовлетворить, остаточный спрос будет нулевым, и фирма 2 будет иметь нулевую прибыль. Ясно, что фирма 2 в равновесии не станет назначать цену $p_2>p_1$, поскольку любая цена из отрезка (c, p_1) дает более высокую прибыль. Это иллюстрирует Рис. 2, созданный на основе Рис. 1а. Стрелкой указан способ увеличения прибыли для фирмы 2 в случае

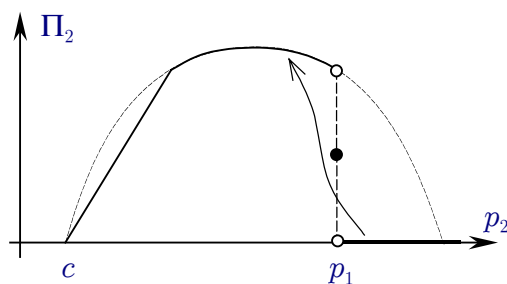



Рисунок 2. Фирма 2 может увеличить прибыль, если $p_1<p_2$ и $p_1\geqslant p_1^Q$

$p_1<p_2$.

Если же $p_1<p_1^Q$, то фирма 1 не сможет удовлетворить спрос $D(p_1)$ и вынуждена будет ограничиться производством в объеме $y_1=Q_1$. В окрестности этой цены прибыль фирмы 1 при фиксированной цене p_2 возрастает линейно. Ей достаточно немного увеличить цену, и ее прибыль станет выше. Фирма 1 может это сделать, коль скоро, $p_1<p_2$. (См. Рис. 3)

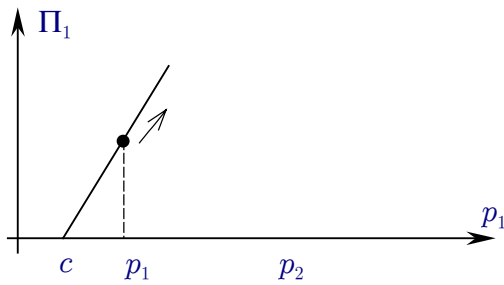



Рисунок 3. Фирма 1 может увеличить прибыль, если $p_1<p_2$ и $p_1<p_1^Q$

Мы рассмотрели два возможных случая: $p_1\geqslant p_1^Q$ и $p_1<p_1^Q$ и продемонстрировали, что ситуация $p_1<p_2$ не может возникнуть в равновесии. Аналогично, $p_1>p_2$ тоже невозможно. Поэтому в равновесии цены могут быть только равными: $p_1=p_2$.

Рассмотрим ситуацию $p_1=p_2=p$. Возможны три случая: $D(p)< Q_1+Q_2$, $D(p)> Q_1+Q_2$ и $D(p)= Q_1+Q_2$.

Покажем, что в равновесии возможен только третий случай. При этом мощности обеих фирм полностью загружены: $y_1=Q_1$, $y_2=Q_2$, а весь спрос удовлетворен. Обозначим соответствующую цену через p^*. Тогда выполнено

$$D(p^*)=Q_1+Q_2.$$

Пусть, например, $D(p)<Q_1+Q_2$. Тогда $p_1=p_2=p>p^*$. В этом случае мощности недогружены хотя бы у одной фирмы. Пусть это фирма 2. Поскольку по предположению при равных ценах объем продаж фирмы 1 не равен нулю (как делят рынок — неважно), то продажи фирмы 2 ниже полного спроса $D(p)$. Если фирма 2 снизит цену, то она окажется в положении монополиста. Она сможет выбрать более высокий объем производства (на уровне спроса при новой цене или же на уровне мощностей — в зависимости от того, что ниже). Если снижение цены будет не очень большим, то прибыль возрастет. Этого не может быть в равновесии.

Рисунок 4. При $D(p)<Q_1+Q_2=D(p^*)$ фирма с недогруженными мощностями может увеличить прибыль, немного снизив цену

Рисунок 5. При $Q_1+Q_2=D(p^*)<D(p)$ при небольшом увеличении относительно общей цены р прибыль любой фирмы возрастает линейно, поскольку производство ограничено мощностями

Если же $Q_1+Q_2=D(p^*)<D(p)$, то $p_1=p_2=p<p^*$, мощности полностью загружены: $y_1=Q_1$, $y_2=Q_2$, и часть спроса не удовлетворена. При этом любой фирме выгодно несколько повысить цену. Рассмотрим, например, фирму 2. Пусть она назначает цену выше p, в то время, как у фирмы 1 цена та же: $p_1=p$. При $p_2>p_1$ у первой фирмы весь спрос. Она как производила $y_1=Q_1$, так и будет производить. Пока $p_2<p^*$ остаточный спрос $D(p_2)-Q_1$ будет выше Q_2, и поэтому мощности загружены полностью ($y_2=Q_2$), и прибыль возрастает линейно. (Справа от точки p^* остаточный спрос ниже Q_2, т.е. прибыль по остаточному спросу.). Этого не может быть в равновесии.

Следовательно, в равновесии должно выполняться $p_1=p_2=p^*$, $y_1=Q_1$, $y_2=Q_2$, и $D(p^*)=y_1+y_2=Q_1+Q_2$.

Рассмотрим, при каких условиях это может быть равновесием. Это равновесие (по определению равновесия Нэша), если не выгодно менять цену, коль скоро конкурент держит p^*. Рассмотрим, например, фирму 2. Какой будет ее прибыль, если $p_1=p^*$. При $p_2<p^*$ фирма 2 будет продавать $y_2=Q_2$ (как и при $p_2=p^*$), ведь спрос при этом увеличивается, а мощности

те же. Если же $p_2 > p^*$, то фирме 2 достанется остаточный спрос: $D_2(p) = D(p) - Q_1$. При этом прибыль будет равна $\Pi_2(p) = (p-c)(D(p) - Q_1)$.

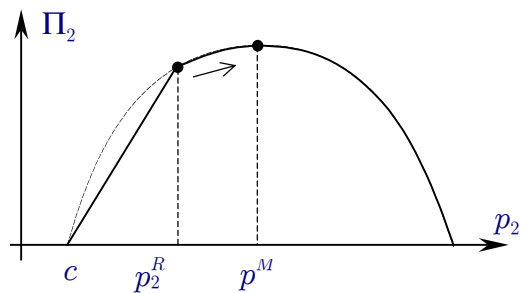



Рисунок 6. При $p_2^R > p^*$ случай $p_1 = p_2 = p^*$ не может соответствовать равновесию

Предположим, что прибыль $(p-c)(D(p)-Q_1)$ квазивогнута, т.е. вершина одна, а в обе стороны снижается. По форме это прибыль фирмы 2 в модели Курно, если фирма 1 выпускает Q_1. Максимум этой прибыли достигается при объеме производства $y_2 = R_2(Q_1)$, где $R_2(\cdot)$ — функция отклика модели Курно. Цена p_2^R, при которой достигается максимум, удовлетворяет соотношению $D_2(p_2^R) = R_2(Q_1)$, т.е. $D(p_2^R) = R_2(Q_1) + Q_1$. В рассматриваемой модели этот максимум может быть достигнут если $p_2^R \geqslant p^*$. Соответственно, при $p_2^R > p^*$ равновесия быть не может, поскольку фирма 2 выберет p_2^R, а не p^* — выгодно поменять цену.

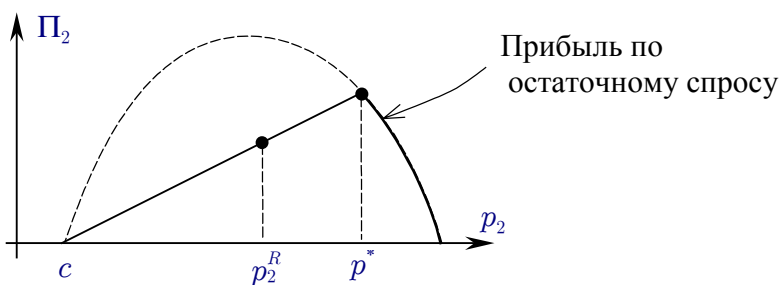



Рисунок 7. При $p_2^R \leqslant p^*$ случай $p_1 = p_2 = p^*$ может соответствовать равновесию

Если $p_2^R \leqslant p^*$, то максимум прибыли фирмы 2 достигается при $p_2 = p^*$. Тогда это равновесие — не выгодно менять цену.

Т.е. рассматриваемый случай $p_1 = p_2 = p^*$ соответствует равновесию, только если $p_2^R \leqslant p^*$, и, аналогично, $p_1^R \leqslant p^*$.

$$p_j^R \leqslant p^* \Leftrightarrow D(p_j^R) \geqslant D(p^*) \Leftrightarrow R_j(Q_{-j}) + Q_{-j} \geqslant Q_j + Q_{-j} \Leftrightarrow Q_j \leqslant R_j(Q_{-j}).$$

Таким образом, условия существования подобного равновесия можно переписать в виде $Q_1 \leqslant R_1(Q_2)$ и $Q_2 \leqslant R_2(Q_1)$.

На Рис. 8 изображена область, где могут быть равновесия в чистых стратегиях (при не очень больших мощностях: $Q_j \leqslant D(c)$). Она ограничивается кривыми отклика.

Далее, если хотя бы одно из ограничений нарушено, то есть только равновесия в смешанных стратегиях: фирмы будут рандомизировать, чтобы запутать конкурента. Это так называемые *циклы Эджворта*. (Цикл — в динамике. Оптимальный отклик по циклу? ?)

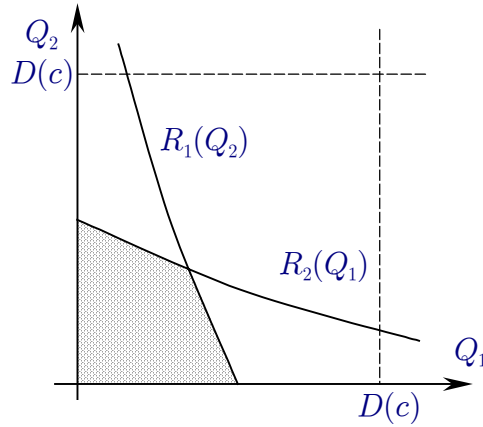



Рисунок 8. Мощности, при которых существует равновесие в чистых стратегиях (заштрихованная область)

Есть и другие области чистых стратегий, но при этом мощности должны быть очень большими хотя бы у одной фирмы, т.е. только при $Q_1 \leqslant D(c)$ или $Q_2 \leqslant D(c)$.

....

Утверждение (без доказательства). В области смешанных стратегий фирма с наибольшими мощностями имеет прибыль как у последователя Штакельберга, т.е.

$$R_j(Q_{-j})p(Q_{-j}+R_j(Q_{-j})) = R_j(Q_{-j})p_j^R,$$

где $p(\cdot)$ — обратная функция спроса.

Рассмотрим теперь выбор мощностей. На их создание фирмы несут издержки γQ_j. Т.е. от текущей прибыли надо отнять еще и эти издержки. С учетом их мы можем найти модифицированные функции отклика. На рисунке соответствующие кривые сдвинутся вниз (Рис.). Пусть точка пересечения — (Q^{**},Q^{**}). Покажем, что это равновесие в свернутой игре выбора мощностей, т.е. не выгодно менять Q^{**} на другое Q_j.

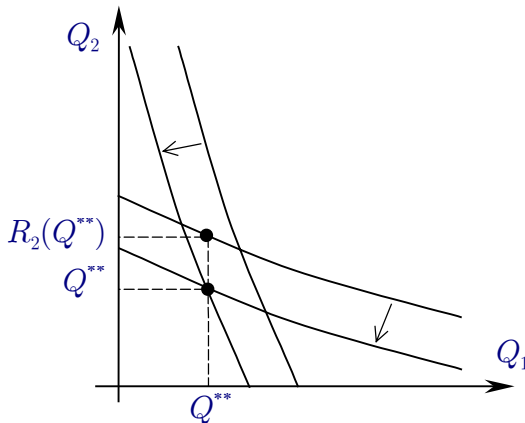



Рисунок 9. Мощности, при которых существует равновесие в чистых стратегиях (заштрихованная область)

Пусть $Q_1=Q^{**}$, а Q_2 — другое. Если $Q_2 \leqslant R_2(Q^{**})$, то это область чистых стратегий, где наилучший отклик — это Q^{**}. Если же $Q_2 > R_2(Q^{**})$, то это область смешанных стратегий, причем $Q_2 > Q_1 = Q^{**}$, т.е. фирма 2 получает прибыль как последователь Штакельберга без учета γ, минус еще γQ_2, т.е. меньше, чем если бы выбрала $R_2(Q^{**})$, а $R_2(Q^{**})$, в свою очередь, дает меньшую прибыль, чем Q^{**}. Т.е. при $Q_1=Q^{**}$ выбор $Q_2=Q^{**}$ обеспечивает максимум прибыли фирмы 2. Фирме 1 тоже не выгодно менять размер мощностей по сравнению с Q^{**}.

Можно доказать и единственность (без доказательства).

Т.е. получили результат Курно в модифицированной модели Бертрана.

Но это только если эффективное рационирование. Если другое, то необязательно Курно, особенно если издержки γ малы, и рационирование далеко от эффективного.